УДК 517. 958: 534. 286-16

В. Т. ЕРОФЕЕНКО

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУХСТОРОННИХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН НА УПРУГОМ ЭКРАНЕ

Белорусский государственный университет

(*Поступила в редакцию 18.02.2010*)

В математической физике значительное место занимают задачи дифракции волн различной природы на материальных структурах со специальной геометрией [1]. Выделяют класс задач дифракции высокочастотных электромагнитных полей [2], задачи распространения упругих волн [3], задачи распространения и дифракции акустических волн на препятствиях из различных материалов [4]. Такие задачи формируются в виде краевых задач для трехмерного пространства с граничными условиями сопряжения на поверхностях материальных тел, расположенных в пространстве. Задачи состоят в определении полей, проникших в тела, и полей, отраженных от тел. Как правило, задачи сопряжения формулируются для уравнений одного типа для определения полей, как внутри тел, так и во внешних областях.

В последнее время актуальными являются как с математической, так и с прикладной точек зрения задачи сопряжения для уравнений различных типов. В работе рассматривается трехобластная краевая задача для слоя: в полупространствах по обе стороны слоя поля подчиняются скалярному уравнению Гельмгольца для давлений в среде, а поля в слое – векторному уравнению Ламе для перемещений среды. Слои или многослойные структуры рассматриваются как экраны, препятствующие распространению звуковых волн [5–7], и используются для защиты информации, передаваемой акустическими техническими устройствами. При решении краевых задач для слоистых структур применяется матричный метод, в котором последовательно удовлетворяются граничные условия сопряжения на плоских границах раздела материальных слоев. В работе в случае монохроматических акустических плоских волн, распространяющихся в произвольном направлении, получены двухсторонние нелокальные граничные условия, связывающие акустические поля по обе стороны упругого слоя. Условия получены для произвольных комплекснозначных коэффициентов Ламе и комплексной плотности среды, что используется для создания звукопоглощающих экранов [8]. Моделирование граничных условий основывалось на методах работы [9]. Разработанные граничные условия могут быть использованы для моделирования процессов проникновения акустических волн в тонкостенные упругие оболочки произвольной формы.

1. Постановка задачи. В пространстве $\mathbb{R}^3$ размещен плоский слой $D(0 < z < \Delta)$ упругого материала. Полупространства $D_1(z < 0)$ и $D_2(z > \Delta)$ заполнены средами, в которых распространяются звуковые волны, колеблющиеся с круговой частотой звука ω. Под воздействием звукового поля слой D совершает упругие колебания, а его деформация определяется полем перемещений $\vec{u}(x, y, z)$, которое удовлетворяет уравнениям Ламе [3]

$$\mu_c \Delta\vec{u} + (\lambda_c + \mu_c)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{u} + \omega^2\rho_c\vec{u} = 0 \text{ в } D, \tag{1}$$

где μ_c, λ_c – коэффициенты Ламе слоя, ρ_c – плотность материала слоя $D, \vec{u}$ – комплексная амплитуда поля перемещений.

Реальное поле перемещений определяется формулой $\vec{U} = \mathrm{Re}(\vec{u}e^{-i\omega t})$.

Полупространства D_j заполнены средами, характеризуемыми плотностями среды ρ_j и скоростями звука в среде a_j. В области D_1 расположен источник акустического поля, которое определяется комплексной амплитудой давления $v_0(x,y,z)$ в точке $(x,y,z)\in D_1$ [10, с. 119]; v_1' – отраженное акустическое поле в D_1; v_2 – акустическое поле, прошедшее в область $D_2, v_1 = v_0 + v_1'$ – суммарное поле в D_1. Реальное поле давлений определяется выражением $P_j = \mathrm{Re}(v_j e^{-i\omega t}),\ j = 1, 2.$

На граничных плоскостях $\Gamma_1(z=0), \Gamma_2(z=\Delta)$ слоя D выполнены граничные условия взаимодействия звуковых волн с упругим слоем D [1, с. 90]:

$$(\vec{u},\vec{n})\big|_{\Gamma_j} = p_j \left.\frac{\partial v_j}{\partial \vec{n}}\right|_{\Gamma_j}, \quad T(\vec{u})\big|_{\Gamma_j} = -v_j\vec{n}\big|_{\Gamma_j}, \tag{2}$$

где $\vec{n} = \vec{e}_z$ – единичная нормаль к слою D, $p_j = \dfrac{1}{\omega^2\rho_j}$.

$$T(\vec{u}) = 2\mu_c \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} + \lambda_c \vec{e}_z \,\mathrm{div}\vec{u} + \mu_c[\vec{e}_z, \mathrm{rot}\,\vec{u}], \tag{3}$$

$T(\vec{u})$ – оператор напряжений на плоскостях $z = \mathrm{const}$.

Сформируем трехобластную краевую задачу для областей D_1, D, D_2.

Краевая задача 1. Для заданного первичного звукового поля $v_0 \in C^2(\bar{D}_1 \setminus \bar{D}_0)$ ($\bar{D}_0$ – область источника поля) требуется определить звуковые поля $v_1' \in C^2(D_1)\bigcap C^1(\bar{D}_1)$, $v_2 \in C^2(D_2)\bigcap C^1(\bar{D}_2)$, которые удовлетворяют уравнениям Гельмгольца

$$\Delta v_1' + (k^{(1)})^2 v_1' = 0 \quad \text{в } D_1,\ \Delta v_2 + (k^{(2)})^2 v_2 = 0 \quad \text{в } D_2, \tag{4}$$

требуется также определить поле перемещений $\vec{u} \in C^2(D)\bigcap C^1(\bar{D})$, которое удовлетворяет уравнению (1), граничным условиям (2) и условиям излучения на бесконечности.

В дальнейшем рассмотрим случай плоского первичного поля вида

$$v_0 = A\exp(i\alpha_1 x + i\alpha_2 y - v^{(1)}z), \quad z < 0, \tag{5}$$

где α_1, α_2 – заданные произвольные числа, $v^{(1)} = \sqrt{\lambda^2 - (k^{(1)})^2}$,

$$-\frac{\pi}{2} \le \arg v^{(1)} < \frac{\pi}{2}, \quad \lambda = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, \quad 0 \le \arg\lambda < \pi,$$

A – заданная амплитуда $k^{(1)} = \dfrac{\omega}{a_1}$.

В этом случае область источника $\bar{D}_0$ удалена на бесконечность.

Отраженное поле определяется выражением

$$v_1' = A_1\exp(i\alpha_1 x + i\alpha_2 y + v^{(1)}z), \quad z < 0, \tag{6}$$

а прошедшее в область D_2 поле

$$v_2 = A_2 \exp(i\alpha_1 x + i\alpha_2 y - v^{(2)} z), \quad z > \Delta, \tag{7}$$

где

$$v^{(2)} = \sqrt{\lambda^2 - (k^{(2)})^2}, \ -\frac{\pi}{2} \le \arg v^{(2)} < \frac{\pi}{2}, \ k^{(2)} = \frac{\omega}{a_2}.$$

Функции (6), (7) удовлетворяют уравнениям (4).

В этом случае поле перемещений в области D также имеет структуру плоского поля:

$$\vec{u} = (A\vec{e}_x + B\vec{e}_y + C\vec{e}_z)\exp(i\alpha_1 x + i\alpha_2 y \pm vz), \quad 0 < z < \Delta, \tag{8}$$

где A, B, C – постоянные, не зависящие от x, y, z.

Структура полей (5) – (8) позволяет сформулировать краевую задачу 1 в виде двухобластной краевой задачи для областей D_1 и D_2 с нелокальными граничными условиями, связывающими звуковые поля по обе стороны слоя D.

Краевая задача 2. Для заданного первичного поля v_0 требуется определить звуковые поля $v_1' \in C^2(D_1) \bigcap C^1(\bar{D}_1)$, $v_2 \in C^2(D_2) \bigcap C^1(\bar{D}_2)$, которые удовлетворяют уравнениям

$$\Delta v_1' + (k^{(1)})^2 v_1' = 0 \text{ в } D_1, \ \Delta v_2 + (k^{(2)})^2 v_2 = 0 \text{ в } D_2, \tag{9}$$

граничным условиям

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v_1}{\partial \vec{n}}(M_1)\bigg|_{\Gamma_1} = a_{11} v_1(M_1)\big|_{\Gamma_1} + a_{12} v_2(M_2)\big|_{\Gamma_2}, \ M_1 = (x, y, 0), \\ &\frac{\partial v_2}{\partial \vec{n}}(M_2)\bigg|_{\Gamma_2} = a_{21} v_1(M_1)\big|_{\Gamma_1} + a_{22} v_2(M_2)\big|_{\Gamma_2}, \ M_2 = (x, y, \Delta), \end{aligned} \tag{10}$$

и условиям излучения на бесконечности.

В работе построены модели граничных условий (10) и решена задача (9), (10) для конкретного источника звукового поля.

2. Плоские базисные волны в упругой среде. Найдем вихревые плоские решения уравнения (1) вида (8). Такие решения удовлетворяют системе уравнений [2, с. 15]

$$\Delta \vec{u} + k_2^2 \vec{u} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0, \tag{11}$$

где

$$k_2 = \omega \sqrt{\frac{\rho_c}{\mu_c}}, \qquad 0 \le \arg k_2 < \pi.$$

Четыре линейно независимых плоских решения системы (11) представим в виде [2, с. 9]:

$$\vec{u}_1^{(\mp)} = \vec{W}^{(\mp 1)}(\vec{r}; \alpha_1, \alpha_2; k_2) \equiv i\vec{V}_1 X_2(\mp z), \tag{12}$$

$$\vec{u}_2^{(\mp)} = \vec{W}^{(\mp 2)}(\vec{r}; \alpha_1, \alpha_2; k_2) \equiv \frac{1}{k_2}(\mp i v_2^c \vec{V}_2 + \lambda \vec{e}_z) X_2(\mp z), \tag{13}$$

где

$$\vec{V}_1 = \frac{1}{\lambda}(\alpha_2 \vec{e}_x - \alpha_1 \vec{e}_y), \qquad \vec{V}_2 = \frac{1}{\lambda}(\alpha_1 \vec{e}_x + \alpha_2 \vec{e}_y), \tag{14}$$

$$v_2^c = \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}, \quad -\frac{\pi}{2} \le \arg v_2^c < \frac{\pi}{2}, \quad \lambda = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, \quad 0 \le \arg \lambda < \pi,$$

$$X_j(\mp z) = \exp(i\alpha_1 x + i\alpha_2 y \mp v_j^c z), \quad j = 1, 2. \tag{15}$$

Построим потенциальные плоские решения уравнения (1) вида

$$\vec{u} = \operatorname{grad} w, \tag{16}$$

где функция w удовлетворяет скалярному уравнению

$$\Delta w + k_1^2 w = 0, \tag{17}$$

где

$$k_1 = \omega\sqrt{\frac{\rho_c}{\lambda_c + 2\mu_c}}, \qquad 0 \le \arg k_1 < \pi.$$

Рассмотрим плоские решения уравнения (17) вида

$$W = \frac{1}{\lambda} X_1(\mp z), \tag{18}$$

где $X_1(\mp z)$ определяется формулой (15),

$$v_1^c = \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}, \quad -\frac{\pi}{2} \le \arg v_1^c < \frac{\pi}{2}.$$

Подставляя (18) в (16), найдем решение уравнения (1)

$$\vec{u}_3^{(\mp)} = \left(i\vec{V}_2 \mp \frac{v_1^c}{\lambda}\vec{e}_z \right) X_1(\mp z). \tag{19}$$

В результате имеем полный набор плоских полей (12), (13), (19):

$$\begin{gathered} \vec{u}_1^{(\mp)} = i\vec{V}_1 X_2(\mp z), \\ \vec{u}_2^{(\mp)} = (\mp f_2\vec{V}_2 + g_2\vec{e}_z) X_2(\mp z), \\ \vec{u}_3^{(\mp)} = (f_3\vec{V}_2 \mp g_3\vec{e}_z) X_1(\mp z), \end{gathered} \tag{20}$$

где

$$f_2 = \frac{iv_2^c}{k_2}, \qquad g_2 = \frac{\lambda}{k_2}, \qquad f_3 = i, \qquad g_3 = \frac{v_1^c}{\lambda}.$$

Укажем, что для вектор-функций (20) выполнены соотношения

$$\begin{gathered} \operatorname{rot}\vec{u}_1^{(\mp)} = k_2\vec{u}_2^{(\mp)}, \ \operatorname{rot}\vec{u}_2^{(\mp)} = k_2\vec{u}_1^{(\mp)}, \\ \operatorname{div}\vec{u}_1^{(\mp)} = 0, \ \operatorname{div}\vec{u}_2^{(\mp)} = 0, \ \operatorname{rot}\vec{u}_3^{(\mp)} = 0, \end{gathered} \tag{21}$$

которые используются для аналитических преобразований.

3. Действие оператора напряжений. Поле перемещений $\vec{u}$ в упругой среде, характеризуемой параметрами λ_c, μ_c, ρ_c, вызывает напряжения. Поле напряжений в среде на плоскостях $\Gamma(z = \text{const})$ определяется оператором (3), действующим на перемещения $\vec{u}$. Вычислим поля напряжений, вызываемых базисными плоскими полями (20).

Л е м м а 1. *Действие оператора* (3) *на вектор-функции* (20) *определяется формулами*

$$\begin{gathered} T(\vec{u}_1^{(\mp)}) = \mp a_1\vec{V}_1 X_2(\mp z), \\ T(\vec{u}_2^{(\mp)}) = (b_2\vec{V}_2 \mp c_2\vec{e}_z) X_2(\mp z), \\ T(\vec{u}_3^{(\mp)}) = (\mp b_3\vec{V}_2 + c_3\vec{e}_z) X_1(\mp z), \end{gathered} \tag{22}$$

где

$$a_1 = i\mu_c v_2^c, \quad b_2 = i\mu_c\left(2\frac{\lambda^2}{k_2} - k_2\right), \quad c_2 = 2\frac{\mu_c \lambda v_2^c}{k_2},$$

$$b_3 = 2i\mu_c v_1^c, \quad c_3 = \frac{1}{\lambda}(2\mu_c\lambda^2 - k_1^2 l_c), \quad l_c = 2\mu_c + \lambda_c.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеют место следующие векторные произведения для векторов (14):

$$[\vec{e}_z, \vec{V}_1] = \vec{V}_2, \quad [\vec{e}_z, \vec{V}_2] = -\vec{V}_1, \quad [\vec{V}_1, \vec{V}_2] = \vec{e}_z. \tag{23}$$

Применим оператор (3) к первой вектор-функции (20), используя формулы (21), тогда с учетом (23) получим

$$T(\vec{u}_1^{(\mp)}) = 2\mu_c \frac{\partial \vec{u}_1^{(\mp)}}{\partial z} + \mu_c k_2 \left[\vec{e}_z, \vec{u}_2^{(\mp)}\right] =$$

$$(2i\mu_c(\mp v_2^c)\vec{V}_1 + \mu_c k_2(\mp f_2)[\vec{e}_z, \vec{V}_2])X_2(\mp z) = \mp i\mu_c v_2^c \vec{V}_1 X_2(\mp z).$$

Аналогично выводятся вторая и третья формулы (22), с учетом соотношений (15)–(18) для поля $\vec{u}_3^{(\mp)}$.

4. Перемещения и напряжения в плоском упругом слое. Рассмотрим плоский слой $D(0 < z < \Delta)$, заполненный упругой средой. Слой ограничен плоскостями $\Gamma_1(z=0), \Gamma_2(z=\Delta)$. Будем предполагать, что слой D подвергается деформациям вида (20). Изучим деформацию общего вида, как линейную комбинацию полей (20):

$$\vec{u} = \sum_{s=1}^{3}(A_s \vec{u}_s^{(+)} + B_s \vec{u}_s^{(-)}), \tag{24}$$

где A_s, B_s – комплексные постоянные.

Преобразуем поле (24), учитывая формулы (20). Получим

$$\begin{gathered}\vec{u} = i(A_1 X_2(+z) + B_1 X_2(-z))\vec{V}_1 + \\ (A_2 f_2 X_2(+z) + A_3 f_3 X_1(+z) - B_2 f_2 X_2(-z) + B_3 f_3 X_1(-z))\vec{V}_2 + \\ (A_2 g_2 X_2(+z) + A_3 g_3 X_1(+z) + B_2 g_2 X_2(-z) - B_3 g_3 X_1(-z))\,\vec{e}_z.\end{gathered} \tag{25}$$

Представим вектор перемещений (24) в базисе $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{e}_z$ в виде

$$\vec{u} = u_1(z)\vec{V}_1 + u_2(z)\vec{V}_2 + u_3(z)\vec{e}_z \tag{26}$$

и вычислим перемещения на плоскости $\Gamma_1(z=0)$:

$$\vec{u}\big|_{\Gamma_1} = u_1(0)\vec{V}_1 + u_2(0)\vec{V}_2 + u_3(0)\vec{e}_z = u_1^{(1)}\vec{V}_1 + u_2^{(1)}\vec{V}_2 + u_3^{(1)}\vec{e}_z, \tag{27}$$

где $u_s(0) = u_s^{(1)}$ – предельные значения компонент вектора перемещений на плоскости Γ_1.

Приравняем векторы (25), (27) на плоскости $\Gamma_1(z=0)$, получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{gathered}i(A_1 + B_1)\,\Phi = u_1^{(1)}, \\ (A_2 f_2 + A_3 f_3 - B_2 f_2 + B_3 f_3)\,\Phi = u_2^{(1)}, \\ (A_2 g_2 + A_3 g_3 + B_2 g_2 - B_3 g_3)\,\Phi = u_3^{(1)},\end{gathered} \tag{28}$$

где $\Phi = \exp(i\alpha_1 x + i\alpha_2 y)$.

Вычислим напряжения на плоскостях $z = \text{const}$ в слое D, которые возникают в результате перемещений (24). Для этого применим оператор (3) к векторному полю (24), используя формулы (22):

$$T(\vec{u}) = \sum_{s=1}^{3} (A_s T(\vec{u}_s^{(+)}) + B_s T(\vec{u}_s^{(-)})) = a_1 (A_1 X_2(z) - B_1 X_2(-z))\, \vec{V}_1 +$$
$$(A_2 b_2 X_2(z) + A_3 b_3 X_1(z) + B_2 b_2 X_2(-z) - B_3 b_3 X_1(-z))\, \vec{V}_2 + \tag{29}$$
$$(A_2 c_2 X_2(z) + A_3 c_3 X_1(z) - B_2 c_2 X_2(-z) + B_3 c_3 X_1(-z))\, \vec{e}_z.$$

Представим вектор напряжений $T(\vec{u})$ в виде

$$T(\vec{u}) = T_1(z)\vec{V}_1 + T_2(z)\vec{V}_2 + T_3(z)\vec{e}_z \tag{30}$$

и вычислим напряжения на плоскости $\Gamma_1 (z = 0)$:

$$T(\vec{u})\big|_{\Gamma_1} = T_1(0)\vec{V}_1 + T_2(0)\vec{V}_2 + T_3(0)\vec{e}_z = T_1^{(1)}\vec{V}_1 + T_2^{(1)}\vec{V}_2 + T_3^{(1)}\vec{e}_z, \tag{31}$$

где $T_s(0) = T_s^{(1)}$ – предельные значения компонент вектора напряжений на плоскости Γ_1.

Приравняем векторы (29), (31) на плоскости $\Gamma_1 (z = 0)$, получим систему уравнений

$$a_1 (A_1 - B_1) \Phi = T_1^{(1)},$$
$$(A_2 b_2 + A_3 b_3 + B_2 b_2 - B_3 b_3) \Phi = T_2^{(1)}, \tag{32}$$
$$(A_2 c_2 + A_3 c_3 - B_2 c_2 + B_3 c_3) \Phi = T_3^{(1)}.$$

Разрешим систему уравнений (28), (32), определив коэффициенты A_s, B_s.

$$A_1 = \left(-iu_1^{(1)} + \frac{1}{a_1} T_1^{(1)} \right) K, \qquad B_1 = \left(-iu_1^{(1)} - \frac{1}{a_1} T_1^{(1)} \right) K, \tag{33}$$

$$A_2 = \left[\frac{1}{d_1}(c_3 u_2^{(1)} - f_3 T_3^{(1)}) + \frac{1}{d_2}(b_3 u_3^{(1)} - g_3 T_2^{(1)}) \right] K,$$
$$B_2 = \left[\frac{1}{d_2}(b_3 u_3^{(1)} - g_3 T_2^{(1)}) - \frac{1}{d_1}(c_3 u_2^{(1)} - f_3 T_3^{(1)}) \right] K, \tag{34}$$
$$A_3 = \left[\frac{1}{d_1}(f_2 T_3^{(1)} - c_2 u_2^{(1)}) + \frac{1}{d_2}(g_2 T_2^{(1)} - b_2 u_3^{(1)}) \right] K,$$
$$B_3 = \left[\frac{1}{d_1}(f_2 T_3^{(1)} - c_2 u_2^{(1)}) - \frac{1}{d_2}(g_2 T_2^{(1)} - b_2 u_3^{(1)}) \right] K,$$

где

$$K = \frac{1}{2\Phi}, \quad d_1 = -il_c \frac{v_2^c k_1^2}{k_2 \lambda}, \quad d_2 = i\mu_c \frac{k_2 v_1^c}{\lambda}.$$

Подставляя коэффициенты (33) в (24), (29), получим выражения полей перемещений и напряжений в слое D через предельные значения $u_s^{(1)}, T_s^{(1)}$.

5. Переходная матрица для плоских упругих колебаний в слое. При звуковом воздействии в материале слоя D возникают перемещения и напряжения, выраженные через плоские волны (20) и плоские напряжения (22). Используя этот факт, найдем соотношения, связывающие перемещения и напряжения на плоскостях Γ_1 и Γ_2.

Вычислим перемещения на плоскости $\Gamma_2(z=\Delta)$ слоя *D*. Приравнивая выражения (25), (26) при $z=\Delta$, получим равенства для коэффициентов при векторах $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{e}_z$:

$$u_1^{(2)} = i\,(A_1 F_2^{(+)} + B_1 F_2^{(-)})\,\Phi; \tag{35}$$

$$\begin{aligned} u_2^{(2)} &= (A_2 f_2 F_2^{(+)} + A_3 f_3 F_1^{(+)} - B_2 f_2 F_2^{(-)} + B_3 f_3 F_1^{(-)})\,\Phi, \\ u_3^{(2)} &= (A_2 g_2 F_2^{(+)} + A_3 g_3 F_1^{(+)} + B_2 g_2 F_2^{(-)} - B_3 g_3 F_1^{(-)})\,\Phi, \end{aligned} \tag{36}$$

где $u_s^{(2)} = u_s(\Delta)$, $F_j^{(\mp)} = \exp(\mp v_j^c\,\Delta)$, $s = 1, 2, 3$.

Далее вычислим напряжения на плоскости $\Gamma_2(z=\Delta)$. Приравнивая выражения (29), (30) при $z=\Delta$, получим

$$T_1^{(2)} = a_1\,(A_1 F_2^{(+)} - B_1 F_2^{(-)})\,\Phi; \tag{37}$$

$$\begin{aligned} T_2^{(2)} &= (A_2 b_2 F_2^{(+)} + A_3 b_3 F_1^{(+)} + B_2 b_2 F_2^{(-)} - B_3 b_3 F_1^{(+)})\,\Phi, \\ T_3^{(2)} &= (A_2 c_2 F_2^{(+)} + A_3 c_3 F_1^{(+)} - B_2 c_2 F_2^{(-)} + B_3 c_3 F_1^{(-)})\,\Phi, \end{aligned} \tag{38}$$

где $T_s^{(2)} = T_s(\Delta)$, $s = 1, 2, 3$.

Т е о р е м а 1. *Предельные значения компонент перемещений и напряжений на плоскостях* Γ_1 *и* Γ_2 *в базисе* $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{e}_z$ *плоских упругих полей* (26)*, распространяющихся в упругом слое D и удовлетворяющих уравнениям Ламе* (1)*, связаны нелокальными граничными условиями сопряжения*

$$\begin{aligned} u_1^{(2)}(M_2) &= b_{11} u_1^{(1)}(M_1) + b_{12} T_1^{(1)}(M_1), \\ T_1^{(2)}(M_2) &= b_{21} u_1^{(1)}(M_1) + b_{22} T_1^{(1)}(M_1), \end{aligned} \tag{39}$$

где

$$b_{11} = C_2, \quad b_{12} = \frac{S_2}{\mu_c v_2^c}, \quad b_{21} = \mu_c v_2^c S_2, \quad b_{22} = C_2,$$

$$S_2 = \mathrm{sh}\,(v_2^c\,\Delta), \quad C_2 = \mathrm{ch}\,(v_2^c\,\Delta); \quad v_2^c = \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}, \quad -\frac{\pi}{2} \le \arg v_2^c < \frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned} u_2^{(2)}(M_2) &= W_{11} u_2^{(1)}(M_1) + W_{12} T_2^{(1)}(M_1) + W_{13} u_3^{(1)}(M_1) + W_{14} T_3^{(1)}(M_1), \\ T_2^{(2)}(M_2) &= W_{21} u_2^{(1)}(M_1) + W_{22} T_2^{(1)}(M_1) + W_{23} u_3^{(1)}(M_1) + W_{24} T_3^{(1)}(M_1), \\ u_3^{(2)}(M_2) &= W_{31} u_2^{(1)}(M_1) + W_{32} T_2^{(1)}(M_1) + W_{33} u_3^{(1)}(M_1) + W_{34} T_3^{(1)}(M_1), \\ T_3^{(2)}(M_2) &= W_{41} u_2^{(1)}(M_1) + W_{42} T_2^{(1)}(M_1) + W_{43} u_3^{(1)}(M_1) + W_{44} T_3^{(1)}(M_1), \end{aligned} \tag{40}$$

где

$$\begin{aligned} &W_{11} = q_1(c_3 f_2 C_2 - c_2 f_3 C_1), \quad W_{12} = q_2(g_2 f_3 S_1 - g_3 f_2 S_2), \\ &W_{13} = q_2(b_3 f_2 S_2 - b_2 f_3 S_1), \quad W_{14} = q_1 f_2 f_3 (C_1 - C_2), \\ &W_{21} = q_1(c_3 b_2 S_2 - c_2 b_3 S_1), \quad W_{22} = q_2(g_2 b_3 C_1 - g_3 b_2 C_2), \\ &W_{23} = q_2 b_2 b_3 (C_2 - C_1), \quad W_{24} = q_1(f_2 b_3 S_1 - f_3 b_2 S_2), \\ &W_{31} = q_1(c_3 g_2 S_2 - c_2 g_3 S_1), \quad W_{32} = q_2 g_2 g_3 (C_1 - C_2), \\ &W_{33} = q_2(b_3 g_2 C_2 - b_2 g_3 C_1), \quad W_{34} = q_1(f_2 g_3 S_1 - f_3 g_2 S_2), \\ &W_{41} = q_1 c_2 c_3 (C_2 - C_1), \quad W_{42} = q_2(g_2 c_3 S_1 - g_3 c_2 S_2), \\ &W_{43} = q_2(b_3 c_2 S_2 - b_2 c_3 S_1), \quad W_{44} = q_1(f_2 c_3 C_1 - f_3 c_2 C_2), \end{aligned} \tag{41}$$

$$q_j = \frac{1}{d_j}, \quad q_1 = \frac{ik_2\lambda}{l_c v_2^c k_1^2}, \quad q_2 = -\frac{i\lambda}{\mu_c k_2 v_1^c}, \quad v_1^c = \sqrt{\lambda^2 - k_1^2},$$

$$-\frac{\pi}{2} \le \arg v_1^c < \frac{\pi}{2}, \quad \lambda = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, \quad 0 \le \arg\lambda < \pi,$$

α_1, α_2 *– произвольные комплексные величины,* $M_1 = (x, y, 0), \quad M_2 = (x, y, \Delta)$.

Матрица $\widehat{W} = \{w_{nm}\}$, $(n, m = 1, 2, 3, 4)$ называется передаточной матрицей для упругого однородного слоя *D*.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставим коэффициенты (33) в условия (35), (37) и получим связующие соотношения (39). Далее, подставляя коэффициенты (34) в условия (36), (38), получим после упрощающих преобразований представление компонент перемещений и напряжений на плоскости Γ_2 через значения на плоскости Γ_1.

6. Граничные условия для акустических полей. Построим модель граничных условий (10), связывающих акустические поля по обе стороны упругого слоя *D*. Коэффициенты граничных условий выразим через матричные элементы (41).

Т е о р е м а 2. *При воздействии плоской акустической волны* (5) *на упругий слой D, перемещения среды в котором подчиняются уравнениям Ламе* (1), *на плоскостях слоя* Γ_1 *и* Γ_2 *с учетом* (2) *возникают акустические давления* v_1 *и* v_2, *связанные нелокальными граничными условиями сопряжения*

$$p_1 \frac{\partial v_1}{\partial \vec{n}}(M_1) = F_{11} v_1(M_1) + F_{12} v_2(M_2),$$
$$p_2 \frac{\partial v_2}{\partial \vec{n}}(M_2) = F_{21} v_1(M_1) + F_{22} v_2(M_2), \tag{42}$$

где

$$F_{11} = \frac{W_{44}W_{21} - W_{24}W_{41}}{W_{43}W_{21} - W_{23}W_{41}}, \quad F_{12} = \frac{W_{21}}{W_{23}W_{41} - W_{43}W_{21}},$$

$$F_{21} = [W_{44}(W_{33}W_{21} - W_{23}W_{31}) + W_{43}(W_{24}W_{31} - W_{34}W_{21}) +$$
$$W_{41}(W_{34}W_{23} - W_{33}W_{24})] / (W_{43}W_{21} - W_{23}W_{41}),$$

$$F_{22} = \frac{W_{33}W_{21} - W_{23}W_{31}}{W_{23}W_{41} - W_{43}W_{21}}, \quad M_1 = (x, y, 0), \quad M_2 = (x, y, \Delta).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из граничных условий (2) на плоскости Γ_1 получим

$$(\vec{u}, \vec{e}_z)\big|_{z=0} = u_3^{(1)} = p_1 \frac{\partial v_1}{\partial \vec{n}}, \quad T(\vec{u})\big|_{z=0} = T_1^{(1)}\vec{V}_1 + T_2^{(1)}\vec{V}_2 + T_3^{(1)}\vec{e}_z = -v_1\vec{e}_z.$$

Следует

$$T_1^{(1)}(M_1) = 0, \quad T_2^{(1)}(M_1) = 0, \quad T_3^{(1)}(M_1) = -v_1(M_1),$$
$$u_3^{(1)}(M_1) = p_1 \frac{\partial v_1(M_1)}{\partial \vec{n}}. \tag{43}$$

Аналогично из граничных условий (2) на плоскости Γ_2 получим

$$T_1^{(2)}(M_2) = 0, \quad T_2^{(2)}(M_2) = 0, \quad T_3^{(2)}(M_2) = -v_2(M_2), \tag{44}$$
$$u_3^{(2)}(M_2) = p_2 \frac{\partial v_2(M_2)}{\partial \vec{n}}.$$

Подставим (43), (44) во второе, третье и четвертое соотношения (40):

$$0 = W_{21}u_2^{(1)} + W_{23} p_1 \frac{\partial v_1}{\partial \vec{n}} - W_{24} v_1, \tag{45}$$

$$p_2 \frac{\partial v_2}{\partial \vec{n}} = W_{31} u_2^{(1)} + W_{33} p_1 \frac{\partial v_1}{\partial \vec{n}} - W_{34} v_1, \tag{46}$$

$$-v_2 = W_{41} u_2^{(1)} + W_{43} p_1 \frac{\partial v_1}{\partial \vec{n}} - W_{44} v_1. \tag{47}$$

Выражая $u_2^{(1)}$ из равенства (45) и подставляя в (46), (47), получим требуемые граничные соотношения (42). Теорема доказана.

На основании разработанных граничных условий (42) элементарно решается краевая задача 2. Подставляя поля (5)–(7) в условия (10), вычислим коэффициенты отражения и прохождения

$$A_1 = \frac{A}{d}\left[a_{12}a_{21} - (a_{11} + v^{(1)})(a_{22} + v^{(2)})\right], \quad A_2 = \frac{2v^{(1)}a_{21}}{F_0 d} A,$$

где

$$F_0 = \exp(-v^{(2)}\Delta), \ d = (a_{11} - v^{(1)})(a_{22} + v^{(2)}) - a_{12}a_{21}, \quad a_{js} = \frac{F_{js}}{p_j}.$$

В заключение введем вектор-столбец $\vec{U}_j = (u_2^{(j)}, T_2^{(j)}, u_3^{(j)}, T_3^{(j)})^T$ и соотношения (40) запишем в матричном виде:

$$\vec{U}_2 = \widehat{W}\vec{U}_1. \tag{48}$$

Рассмотрим упругий экран, состоящий из N плоских слоев, тогда соотношение (48) для слоистого экрана примет вид $\vec{U}_2 = \widehat{W}^{\text{сл}}\vec{U}_1$, где $\widehat{W}^{\text{сл}} = \widehat{W}^{(N)}\widehat{W}^{(N-1)}\ldots\widehat{W}^{(1)}$, $\widehat{W}^{(s)}$ – передаточная матрица для s-го упругого слоя.

Исследование проводилось при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант Ф08-026).

Литература

1. С м а г и н С. И. Интегральные уравнения задач дифракции. Владивосток, 1995.
2. Е р о ф е е н к о В. Т., К о з л о в с к а я И. С. Математические модели в электродинамике. Ч. 2. Минск, 2008.
3. А м е н з а д е Ю. А. Теория упругости. М., 1976.
4. И в а н о в В. П. Задачи дифракции волн в низкочастотной акустике. М., 2004.
5. М о л о т к о в Л. А. Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах. Л., 1984.
6. К а н и б о л о т с к и й М. А., У р ж у м ц е в Ю. С. Оптимальное проектирование слоистых конструкций. Новосибирск, 1989.
7. И г н а т о в и ч В. К. // Акустич. журнал. 1992. Т. 38. Вып.1. С. 70–78.
8. В и к т о р о в а Р. Н., Т ю т е к и н В. В. // Акустич. журнал. 1998. Т. 44, № 3. С. 331–336.
9. А п о л л о н с к и й С. М., Е р о ф е е н к о В. Т. Эквивалентные граничные условия в электродинамике. Спб., 1998.
10. Е р о ф е е н к о В. Т., К о з л о в с к а я И. С. Основы математического моделирования. Минск, 2002.
11. К ю р к ч а н А. Г., С м и р н о в а Н. И. // Акустич. журнал. 2007. Т. 53, № 4. С. 490–500.

V. T. EROFEENKO

MODELING OF TWO-SIDED BOUNDARY CONDITIONS FOR ACOUSTIC WAVES ON THE ELASTIC SCREEN

Summary

Nonlocal boundary conditions linking monochromatic plane sound fields on two sides of the elastic layer are obtained in analytical form. The field of permutations in the elastic medium of the layer satisfies the Lame equation with arbitrary complex-valued Lame coefficients and complex density of material. The boundary conditions simulate the penetration of acoustic waves through the elastic screen.