УДК 517.958:537.8(075.8)

В. Т. ЕРОФЕЕНКО, Д. П. ТАВАККОЛИ

МОДЕЛИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ НА ЭКРАНАХ И ОБОЛОЧКАХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 30.03.2007)

В научной литературе большое внимание уделяется построению математических моделей электромагнитных полей в композитных материалах, представляющих собой однородную среду, содержащую большое число мелких неоднородностей различной формы и материального состава [1]. Такие модели сводятся к решению краевых задач для дифференциальных уравнений Максвелла специального вида со специальными граничными условиями на структурах из композитных материалов. Одни из важнейших структур – пространственные экраны и оболочки, для которых актуальным является моделирование граничных условий сопряжения на них [2–6]. Такие модели создают математическую основу для решения задач экранирования электромагнитных полей композитными экранами, используемыми для решения проблем электромагнитной совместимости технических средств в радиотехнике и электронике.

В данной работе строятся различные варианты векторных граничных условий сопряжения, связывающих электромагнитные поля по обе стороны тонких экранов и оболочек, выполненных из композитных материалов с произвольными комплексными параметрами среды. Получены двухсторонние граничные условия для слоистых экранов и односторонние граничные условия на поверхностях тел с тонкими покрытиями.

Граничные условия на плоских экранах. В пространстве R^3 рассмотрим плоский слой $D\,(z_1 < z < z_2)$, ограниченный плоскостями $\Gamma_1(z = z_1)$, $\Gamma_2(z = z_2)$ и заполненный однородной композитной средой, которая характеризуется комплексными диэлектрической и магнитной проницаемостями ε, μ и произвольными комплексными параметрами Z, G. Обозначим полупространства: $D_1(z < z_1)$, $D_2(z > z_2)$. На слой D из области D_1 падает плоское первичное электромагнитное поле $\vec{E}_0$, $\vec{H}_0$, характеризуемое комплексными постоянными α_1, α_2 и имеющее временную зависимость вида $\exp(-i\omega t)$ (монохроматическое поле), где ω – круговая частота поля. Поле называется плоским, если его компоненты имеют зависимость от декартовых координат вида $\exp i(\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z)$. В результате взаимодействия первичного поля с экраном D в областях D_j образуются результирующие плоские поля $\vec{E}_1 = \vec{E}_0 + \vec{E}_1^{'}$, $\vec{H}_1 = \vec{H}_0 + \vec{H}_1^{'}$, $\vec{E}_2$, $\vec{H}_2$. В слое D также образуется плоское поле $\vec{E}$, $\vec{H}$, которое удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot}\vec{E} = i\omega\left(\mu\vec{H} + Z\vec{E}\right), \quad \operatorname{rot}\vec{H} = -i\omega\left(\varepsilon\vec{E} + G\vec{H}\right). \tag{1}$$

Уравнения (1) моделируют электромагнитные поля в композитных материалах – биизотропных средах, если $G = \bar{Z}$, и киральных средах, если $Z = i\xi, G = -i\xi$.

Проведем прямую линию L ортогональную слою D и обозначим точки $M_j = L \cap \Gamma_j$. Поставим задачу о выводе формул, связывающих поля $\vec{E}_j, \vec{H}_j$ по обе стороны слоя D, которые рассматриваются как граничные условия сопряжения на экране D.

Теорема. *Для плоских монохроматических электромагнитных полей на плоском экране D, моделируемом уравнениями* (1), *выполнены точные граничные условия*

$$\vec{W}_2(M_2)\Big|_{\Gamma_2} = \hat{A}\vec{W}_1(M_1)\Big|_{\Gamma_1} \tag{2}$$

или

$$\vec{E}_{2\tau}(M_2)\Big|_{\Gamma_2} = \left(\hat{A}_{11}\vec{E}_{1\tau}(M_1) + \hat{A}_{12}\vec{H}_{1\tau}(M_1)\right)\Big|_{\Gamma_1}, \tag{3}$$

$$\vec{H}_{2\tau}(M_2)\Big|_{\Gamma_2} = \left(\hat{A}_{21}\vec{E}_{1\tau}(M_1) + \hat{A}_{22}\vec{H}_{1\tau}(M_1)\right)\Big|_{\Gamma_1},$$

где

$$\vec{W}_j = \begin{pmatrix} \vec{E}_{j\tau} \\ \vec{H}_{j\tau} \end{pmatrix}, \ \hat{A} = \hat{A}(\alpha_1, \alpha_2, \omega, \varepsilon, \mu, Z, G, \Delta) = \begin{pmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{pmatrix}$$

$\vec{E}_\tau = \left[\vec{n}\left[\vec{E}, \vec{n}\right]\right] = E_x\vec{e}_x + E_y\vec{e}_y$ *– тангенциальная составляющая поля,* $\vec{n} = \vec{e}_z$ *– нормаль к слою* D*,* $\Delta = z_2 - z_1$ *– толщина слоя,*

$$\hat{A}_{11} = \frac{1}{p_{12}}\begin{pmatrix} p_2(\Phi_1 S_1 - C_1) - p_1(\Phi_2 S_2 - C_2); -p_2\theta_1 S_1 + p_1\theta_2 S_2 \\ p_2\delta_1 S_1 - p_1\delta_2 S_2; -p_2(\Phi_1 S_1 + C_1) + p_1(\Phi_2 S_2 + C_2) \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}_{12} = \frac{1}{p_{12}}\begin{pmatrix} -\Phi_1 S_1 + C_1 + \Phi_2 S_2 - C_2; \theta_1 S_1 - \theta_2 S_2 \\ -\delta_1 S_1 + \delta_2 S_2; \Phi_1 S_1 + C_1 - \Phi_2 S_2 - C_2 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$\hat{A}_{21} = -p_1 p_2 \hat{A}_{12},$$

$$\hat{A}_{22} = \frac{1}{p_{12}}\begin{pmatrix} p_1(-\Phi_1 S_1 + C_1) + p_2(\Phi_2 S_2 - C_2); p_1\theta_1 S_1 - p_2\theta_2 S_2 \\ -p_1\delta_1 S_1 + p_2\delta_2 S_2; p_1(\Phi_1 S_1 + C_1) - p_2(\Phi_2 S_2 + C_2) \end{pmatrix},$$

$$\Phi_j = \frac{\alpha_1\alpha_2 g_j}{g v_j}, \ \theta_j = \frac{g_j}{g v_j}\left(\alpha_1^2 - k_j^2\right), \ \delta_j = \frac{g_j}{g v_j}\left(\alpha_2^2 - k_j^2\right), \ p_{12} = p_1 - p_2 = \frac{2igf}{\mu\omega^3(GZ - \varepsilon\mu)},$$

$$p_j = \frac{1}{\mu}\left(\frac{ig}{\omega g_j} - Z\right), \ k_j = \sqrt{g + \frac{1}{2}a^2 + af_j}, \ 0 \le \arg k_j < \pi, \ f_j = (-1)^j f,$$

$$f = \sqrt{k^2 - b^2}, \ 0 \le \arg f < \pi, \ b = \frac{1}{2}\omega(G + Z), \ g = \omega^2(\varepsilon\mu - ZG), \ k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu},$$

$$0 \le \arg k < \pi, \ g_j = f_j - \frac{1}{2}a, \ a = i\omega(G - Z), \ v_j = \sqrt{\lambda^2 - k_j^2}, \ -\frac{\pi}{2} \le \arg v_j < \frac{\pi}{2},$$

$$\lambda = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, \ 0 \le \arg\lambda < \pi, \ S_j = \operatorname{sh}(v_j\Delta), \ C_j = \operatorname{ch}(v_j\Delta).$$

Доказательство. Представим поле $\vec{E}, \vec{H}$ в слое D в виде комбинации плоских базисных полей [7], удовлетворяющих уравнениям (1), с постоянными коэффициентами a_s, $s = 1, 2, 3, 4$:

$$\vec{E} = a_1\vec{K}^{(+1)} + a_2\vec{K}^{(-1)} + a_3\vec{K}^{(+2)} + a_4\vec{K}^{(-2)}, \tag{5}$$

$$\vec{H} = a_1 p_1\vec{K}^{(+1)} + a_2 p_1\vec{K}^{(-1)} + a_3 p_2\vec{K}^{(+2)} + a_4 p_2\vec{K}^{(-2)},$$

где

$$\vec{K}^{(\mp j)}\left(\vec{r};\alpha_1,\alpha_2,\omega,\varepsilon,\mu,Z,G\right) = \frac{1}{k_j}\left(\mp\frac{iv_j}{\lambda}\vec{e}_2 + \lambda\vec{e}_z - \frac{ig}{\lambda g_j}\vec{e}_1\right)\Phi\left(\mp j\right),$$

$$\vec{e}_1 = \alpha_2\vec{e}_x - \alpha_1\vec{e}_y,\ \vec{e}_2 = \alpha_1\vec{e}_x + \alpha_2\vec{e}_y,\ \Phi\left(\mp j\right) = \exp\left(i\alpha_1 x + i\alpha_2 y \mp v_j z\right).$$

Вычислим тангенциальные компоненты полей (5) на плоскости Γ_1 и получим систему из четырех уравнений

$$\left.\left(a_1 K_\alpha^{(+1)} + a_2 K_\alpha^{(-1)} + a_3 K_\alpha^{(+2)} + a_4 K_\alpha^{(-2)}\right)\right|_{z=z_1} = E_\alpha\big|_{z=z_1} = E_{1\alpha}\big|_{\Gamma_1},$$

$$\left.\left(a_1 p_1 K_\alpha^{(+1)} + a_2 p_1 K_\alpha^{(-1)} + a_3 p_2 K_\alpha^{(+2)} + a_4 p_2 K_\alpha^{(-2)}\right)\right|_{z=z_1} = H_\alpha\big|_{z=z_1} = H_{1\alpha}\big|_{\Gamma_1}, \tag{6}$$

$\alpha = x, y$.

Здесь и в дальнейшем используются классические граничные условия [2, с. 29] непрерывности тангенциальных составляющих на поверхностях Γ_j:

$$\vec{E}_\tau\big|_{\Gamma_1} = \vec{E}_{1\tau}\big|_{\Gamma_1},\ \vec{H}_\tau\big|_{\Gamma_1} = \vec{H}_{1\tau}\big|_{\Gamma_1},\ \vec{E}_\tau\big|_{\Gamma_2} = \vec{E}_{2\tau}\big|_{\Gamma_2},\ \vec{H}_\tau\big|_{\Gamma_2} = \vec{H}_{2\tau}\big|_{\Gamma_2}. \tag{7}$$

Разрешим систему уравнений (6) и выразим коэффициенты a_s через компоненты $E_{1\alpha}\big|_{\Gamma_1}, H_{1\alpha}\big|_{\Gamma_1}$. Полученные выражения $a_s = a_s^{(1)}$ подставим в (5) и вычислим тангенциальные составляющие полей (5) на плоскости $\Gamma_2\left(z = z_2\right)$. С учетом условий (7) получим соотношения

$$E_{2\alpha}\big|_{\Gamma_2} = \left.\left(a_1^{(1)} K_\alpha^{(+1)} + a_2^{(1)} K_\alpha^{(-1)} + a_3^{(1)} K_\alpha^{(+2)} + a_4^{(1)} K_\alpha^{(-2)}\right)\right|_{z=z_2},$$

$$H_{2\alpha}\big|_{\Gamma_2} = \left.\left(a_1^{(1)} p_1 K_\alpha^{(+1)} + a_2^{(1)} p_1 K_\alpha^{(-1)} + a_3^{(1)} p_2 K_\alpha^{(+2)} + a_4^{(1)} p_2 K_\alpha^{(-2)}\right)\right|_{z=z_2},$$

которые после соответствующих упрощений преобразуются к требуемым формулам (3), (4).

Теорема позволяет получить ряд граничных условий, которые могут быть использованы для моделирования различных структур из композитных материалов.

С л е д с т в и е 1. *В случае, когда плоскость $\Gamma_2\left(z = z_2\right)$ идеально проводящая (моделирует металл), тогда на поверхности Γ_1 выполнено импедансное граничное условие*

$$\left[\vec{n},\vec{E}_1\right]\Big|_{\Gamma_1} = \hat{Z}\left[\vec{n},\left[\vec{H}_1,\vec{n}\right]\right]\Big|_{\Gamma_1}, \tag{8}$$

где $\hat{Z} = \hat{S}\hat{A}_{11}^{-1}\hat{A}_{12}$, $\hat{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как известно, на идеально проводящей поверхности выполнено граничное условие $\vec{E}_{2\tau}\big|_{\Gamma_2} = 0$, тогда из условия (3) имеем $\vec{E}_{1\tau}\big|_{\Gamma_1} = -\hat{A}_{11}^{-1}\hat{A}_{12}\vec{H}_{1\tau}\big|_{\Gamma_1}$. Учитывая формулу $\left[\vec{n},\vec{E}_1\right] = -\hat{S}\vec{E}_{1\tau}$, получим требуемое граничное условие (8).

С л е д с т в и е 2. *Если на поверхности Γ_2 высоко проводящего полупространства D_2 выполнено импедансное граничное условие Щукина–Леонтовича* [2, с. 203]

$$\left[\vec{n},\vec{E}_2\right]\Big|_{\Gamma_2}=\hat{Z}_2\left[\vec{n},\left[\vec{H}_2,\vec{n}\right]\right]\Big|_{\Gamma_2}, \tag{9}$$

тогда на поверхности Γ_1 выполняется импедансное граничное условие

$$\left[\vec{n},\vec{E}_1\right]\Big|_{\Gamma_1}=\hat{Z}_p\left[\vec{n},\left[\vec{H}_1,\vec{n}\right]\right]\Big|_{\Gamma_1}, \tag{10}$$

где $\hat{Z}_p=\hat{S}\left(\hat{S}\hat{A}_{11}+\hat{Z}_2\hat{A}_{21}\right)^{-1}\left(\hat{S}\hat{A}_{12}+\hat{Z}_2\hat{A}_{22}\right)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставим выражения (3) в условие (9), тогда

$$\left[\vec{n},\hat{A}_{11}\vec{E}_{1\tau}+\hat{A}_{12}\vec{H}_{1\tau}\right]=-\hat{S}\left(\hat{A}_{11}\vec{E}_{1\tau}+\hat{A}_{12}\vec{H}_{1\tau}\right)=\hat{Z}_2\left(\hat{A}_{21}\vec{E}_{1\tau}+\hat{A}_{22}\vec{H}_{1\tau}\right).$$

Откуда следует $\left(\hat{S}\hat{A}_{11}+\hat{Z}_2\hat{A}_{21}\right)\vec{E}_{1\tau}=-\left(\hat{S}\hat{A}_{12}+\hat{Z}_2\hat{A}_{22}\right)\vec{H}_{1\tau}$. Учитывая $\vec{E}_{1\tau}=\hat{S}\left[\vec{n},\vec{E}_1\right]$, $\hat{S}^{-1}=-\hat{S}$, получим требуемые формулы (10).

Заметим, что граничные условия (3) зависят от параметров α_1,α_2, т. е. зависят от первичного поля. Такая ситуация усложняет решение типовых задач дифракции. Но, как правило, экраны выполнены из материалов, коэффициенты преломления которых значительно выше, чем коэффициенты преломления среды в окружающем пространстве. Это позволяет при моделировании экранирующих структур не учитывать зависимость граничных условий от первичного плоского поля.

С л е д с т в и е 3. *В случае, когда параметры α_1,α_2 первичного поля малы в сравнении с волновыми числами k_j $(j=1,2)$ композитного материала слоя D, т. е. $|\alpha_1|<<|k_j|$, $|\alpha_2|<<|k_j|$, тогда на экране D выполняются приближенные асимптотические, не зависящие от α_1,α_2, граничные условия*

$$\vec{E}_{2\tau}(M_2)\Big|_{\Gamma_2}=\left(\tilde{A}_{11}\vec{E}_{1\tau}(M_1)+\tilde{A}_{12}\vec{H}_{1\tau}(M_1)\right)\Big|_{\Gamma_1}, \tag{11}$$

$$\vec{H}_{2\tau}(M_2)\Big|_{\Gamma_2}=\left(\tilde{A}_{21}\vec{E}_{1\tau}(M_1)+\tilde{A}_{22}\vec{H}_{1\tau}(M_1)\right)\Big|_{\Gamma_1},$$

где

$$\tilde{A}_{11}=\frac{1}{p_{12}}\begin{pmatrix}p_1\tilde{C}_2-p_2\tilde{C}_1; & p_1\tilde{\theta}_2\tilde{S}_2-p_2\tilde{\theta}_1\tilde{S}_1\\ p_2\tilde{\theta}_1\tilde{S}_1-p_1\tilde{\theta}_2\tilde{S}_2; & p_1\tilde{C}_2-p_2\tilde{C}_1\end{pmatrix},$$

$$\tilde{A}_{12}=\frac{1}{p_{12}}\begin{pmatrix}\tilde{C}_1-\tilde{C}_2; & \tilde{\theta}_1\tilde{S}_1-\tilde{\theta}_2\tilde{S}_2\\ \tilde{\theta}_2\tilde{S}_2-\tilde{\theta}_1\tilde{S}_1; & \tilde{C}_1-\tilde{C}_2\end{pmatrix},\ \tilde{A}_{21}=-p_1p_2\tilde{A}_{12}, \tag{12}$$

$$\tilde{A}_{22}=\frac{1}{p_{12}}\begin{pmatrix}p_1\tilde{C}_1-p_2\tilde{C}_2; & p_1\tilde{\theta}_1\tilde{S}_1-p_2\tilde{\theta}_2\tilde{S}_2\\ p_2\tilde{\theta}_2\tilde{S}_2-p_1\tilde{\theta}_1\tilde{S}_1; & p_1\tilde{C}_1-p_2\tilde{C}_2\end{pmatrix},$$

$$\tilde{\theta}_j=\frac{g_jk_j}{ig},\quad \tilde{S}_j=\operatorname{sh}\left(-ik_j\Delta\right),\quad \tilde{C}_j=\operatorname{ch}\left(-ik_j\Delta\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В формулах (4) пренебрегаем величинами второго порядка малости: $\frac{\alpha_1^2}{k_j^2}\approx 0$, $\frac{\alpha_2^2}{k_j^2}\approx 0$, $\frac{\alpha_1\alpha_2}{k_j^2}\approx 0$, тогда $v_j=-ik_j\sqrt{1-\left(\lambda/k_j\right)^2}\approx -ik_j$, $S_j\approx\tilde{S}_j=$ $\operatorname{sh}\left(-ik_j\Delta\right)$, $C_j\approx\tilde{C}_j=$

$\operatorname{ch}\left(-ik_j\Delta\right)$. В силу соотношения $g^2 = g_j^2 k_j^2$ получаем асимптотические формулы $\left|\Phi_j\right| = \dfrac{\left|\alpha_1\alpha_2\right|}{\left|k_j v_j\right|} \approx \dfrac{\left|\alpha_1\alpha_2\right|}{\left|k_j\right|^2} \approx 0, \quad \theta_j \approx \tilde{\theta}_j, \quad \delta_j \approx \tilde{\theta}_j$.

В результате получим асимптотические матрицы (12) для граничных условий (11).

Заменяя в условиях (8) матрицы $\hat{A}_{11}, \hat{A}_{12}$ на асимптотические матрицы $\tilde{A}_{11}, \tilde{A}_{12}$, получим приближенные граничные условия [4].

С л е д с т в и е 4. *Граничные условия* (3) *преобразуются к граничным условиям в симметричной форме*

$$\vec{E}_{2\tau}(M_2) - \vec{E}_{1\tau}(M_1) = \hat{P}_1\vec{H}_{1\tau}(M_1) + \hat{P}_2\vec{H}_{2\tau}(M_2), \tag{13}$$

$$\vec{H}_{2\tau}(M_2) - \vec{H}_{1\tau}(M_1) = \hat{Q}_1\vec{E}_{1\tau}(M_1) + \hat{Q}_2\vec{E}_{2\tau}(M_2),$$

где

$$\hat{P}_1 = \hat{A}_{12} - \left(\hat{A}_{11} - \hat{E}\right)\hat{A}_{21}^{-1}\hat{A}_{22}, \ \hat{P}_2 = \left(\hat{A}_{11} - \hat{E}\right)\hat{A}_{21}^{-1}, \ \hat{E} = \begin{pmatrix} 1\,0 \\ 0\,1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{Q}_1 = \hat{A}_{21} - \left(\hat{A}_{22} - \hat{E}\right)\hat{A}_{12}^{-1}\hat{A}_{11}, \ \hat{Q}_2 = \left(\hat{A}_{22} - \hat{E}\right)\hat{A}_{12}^{-1}.$$

Важными для разработки техники являются исследования слоистых структур из композитных материалов. В связи с этим рассмотрим экран $D = \bigcup\limits_{s=1}^{n} D^{(s)}$, состоящий из n композитных плоскопараллельных слоев $D^{(s)}$ с толщинами Δ_s и граничными плоскостями $\Gamma^{(s+1)}$ и $\Gamma^{(s)}$, $\Gamma^{(1)} = \Gamma_1, \quad \Gamma^{(n+1)} = \Gamma_2, \quad \Delta = \sum\limits_{s=1}^{n}\Delta_s$.

При воздействии на экран первичного поля $\vec{E}_0, \vec{H}_0$ в слоях $D^{(s)}$ образуются электромагнитные поля $\vec{E}^{(s)}, \vec{H}^{(s)}$, которые удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot}\vec{E}^{(s)} = i\omega\left(\mu_s\vec{H}^{(s)} + Z_s\vec{E}^{(s)}\right), \ \operatorname{rot}\vec{H}^{(s)} = -i\omega\left(\varepsilon_s\vec{E}^{(s)} + G_s\vec{H}^{(s)}\right). \tag{14}$$

Построим граничные условия на слоистом экране D, учитывая граничные условия (3) на каждом слое $D^{(s)}$.

С л е д с т в и е 5. *Для плоских монохроматических полей на плоском слоистом экране* D, *моделируемом уравнениями* (14), *выполнены точные граничные условия*

$$\vec{E}_{2\tau}(M_2)\Big|_{\Gamma_2} = \left(\hat{B}_{11}\vec{E}_{1\tau}(M_1) + \hat{B}_{12}\vec{H}_{1\tau}(M_1)\right)\Big|_{\Gamma_1}, \tag{15}$$

$$\vec{H}_{2\tau}(M_2)\Big|_{\Gamma_2} = \left(\hat{B}_{21}\vec{E}_{1\tau}(M_1) + \hat{B}_{22}\vec{H}_{1\tau}(M_1)\right)\Big|_{\Gamma_1},$$

где матрица размерности 4×4

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} \hat{B}_{11} & \hat{B}_{12} \\ \hat{B}_{21} & \hat{B}_{22} \end{pmatrix} = \hat{A}^{(n)}\hat{A}^{(n-1)}\ldots\hat{A}^{(2)}\hat{A}^{(1)} = \{b_{rl}\}; \quad r, l = 1, 2, 3, 4;$$

$$\hat{B}_{11} = \begin{pmatrix} b_{11}, b_{12} \\ b_{21}, b_{22} \end{pmatrix}, \ \hat{B}_{12} = \begin{pmatrix} b_{13}, b_{14} \\ b_{23}, b_{24} \end{pmatrix}, \ \hat{B}_{21} = \begin{pmatrix} b_{31}, b_{32} \\ b_{41}, b_{42} \end{pmatrix}, \ \hat{B}_{22} = \begin{pmatrix} b_{33}, b_{34} \\ b_{43}, b_{44} \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}^{(s)} = \hat{A}\left(\alpha_1, \alpha_2, \omega, \varepsilon_s, \mu_s, Z_s, G_s, \Delta_s\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая непрерывность тангенциальных составляющих полей на плоскостях $\varGamma^{(s)}$, воспользуемся граничным соотношением (2) на слоях $D^{(s)}$:

$$\vec{W}_2\Big|_{\varGamma_2} = \hat{A}^{(n)}\vec{W}^{(n)}\Big|_{\varGamma^{(n)}},\ \vec{W}^{(s+1)}\Big|_{\varGamma^{(s+1)}} = \hat{A}^{(s)}\vec{W}^{(s)}\Big|_{\varGamma^{(s)}},$$

$$\vec{W}^{(2)}\Big|_{\varGamma^{(2)}} = \hat{A}^{(1)}\vec{W}_1\Big|_{\varGamma_1},\ \vec{W}^{(s)} = \begin{pmatrix} \vec{E}_\tau^{(s)} \\ \vec{H}_\tau^{(s)} \end{pmatrix}. \qquad (16)$$

Подставляя последовательно соотношения (16) друг в друга, придем к условию $\vec{W}_2\Big|_{\varGamma_2} = \hat{B}\vec{W}_1\Big|_{\varGamma_1}$, которое соответствует условию (15).

Заметим, что следствия 1–4 могут быть перенесены на слоистые экраны. Например, для следствия 1 получим следующее

С л е д с т в и е 6. *Если поверхность $\varGamma_2$ для слоистого экрана D идеально проводящая, тогда на поверхности $\varGamma_1$ выполнено импедансное граничное условие*

$$\left[\vec{n}, \vec{E}_1\right]\Big|_{\varGamma_1} = \hat{Z}_c\left[\vec{n},\left[\vec{H}_1,\vec{n}\right]\right]\Big|_{\varGamma_1},$$

где $\hat{Z}_c = \hat{S}\hat{B}_{11}^{-1}\hat{B}_{12}$.

Граничные условия на тонких оболочках. В пространстве R^3 рассмотрим тонкую замкнутую оболочку D толщины Δ, ограничивающую область D_2. Пусть $D_1 = R^3 \setminus \left(\bar{D}_2 \cup \bar{D}\right)$ – внешняя область оболочки, $\varGamma_2$ и $\varGamma_1$ – внутренняя и внешняя поверхности, $\varGamma$ – срединная поверхность оболочки. В точке $M_1 \in \varGamma_1$ проведем внутреннюю нормаль $\vec{n}$, которая пересекает поверхность $\varGamma_2$ в точке M_2, а $\varGamma$ – в точке ξ. Область D заполнена композитным материалом, в котором электромагнитное поле удовлетворяет уравнениям Максвелла (1). Зафиксируем декартову систему координат $Ox'y'z'$. Пусть в области D_1 распространяется монохроматическое плоское электромагнитное поле $\vec{E}_0, \vec{H}_0$, которое удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot}\vec{E}_0 = i\omega\mu_0\vec{H}_0,\ \operatorname{rot}\vec{H}_0 = -i\omega\varepsilon_0\vec{E}_0$$

и имеет зависимость от пространственных координат вида

$$F = \exp\left[i\left(\alpha_1' x' + \alpha_2' y' + \alpha_3' z'\right)\right]. \qquad (17)$$

Поставим задачу о постановке граничных условий на поверхности оболочки D. В случае, когда кривизна оболочки R значительно больше толщины Δ, оболочку в окрестности точки M_1 в приближении Кирхгофа можно считать плоской.

В связи с этим будем считать выполненными граничные условия (3), связывающие поля в точках M_1 и M_2. При этом возникает проблема о вычислении постоянных α_1, α_2 первичного поля в окрестности точки M_1. Рассмотрим локальную декартову систему координат M_1xyz с началом в точке M_1, для которой ось M_1z направлена вдоль нормали $\vec{n}$, а оси M_1x, M_1y касательны поверхности $\varGamma_1$ в точке M_1. Построим ортогональное преобразование вращения системы координат $Ox'y'z'$ и преобразование в систему координат M_1xyz:

$$x' = S_{11}x + S_{12}y + S_{13}z + \xi_1,$$

$$y' = S_{21}x + S_{22}y + S_{23}z + \xi_2,$$

$$z' = S_{31}x + S_{32}y + S_{33}z + \xi_3.$$

Подставляя эти выражения в формулу (17), преобразуем F к виду $F = C\exp[i(\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z)]$, где

$$\alpha_1 = \alpha_1(\xi) = \sum_{j=1}^{3} S_{j1}\alpha'_j, \ \alpha_2 = \alpha_2(\xi) = \sum_{j=1}^{3} S_{j2}\alpha'_j .$$

Таким образом, параметры α_1, α_2, входящие в матрицы граничных условий (3), вычислены и зависят от точки M_1. В результате ряда допущений получим следующие модели граничных условий.

Модель 1. Если радиусы кривизны тонкостенной оболочки $R >> \Delta$ и длина волны в области D_1 первичного поля $\lambda_0 = \dfrac{2\pi}{\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} >> \Delta$, тогда на поверхности композитной оболочки D выполнены граничные условия

$$\vec{E}_{2\tau}(M_2)\Big|_{\Gamma_2} = \left(\hat{A}_{11}(M_1)\vec{E}_{1\tau}(M_1) + \hat{A}_{12}(M_1)\vec{H}_{1\tau}(M_1)\right)\Big|_{\Gamma_1},$$

$$\vec{H}_{2\tau}(M_2)\Big|_{\Gamma_2} = \left(\hat{A}_{21}(M_1)\vec{E}_{1\tau}(M_1) + \hat{A}_{22}(M_1)\vec{H}_{1\tau}(M_1)\right)\Big|_{\Gamma_1},$$

где матрицы $\hat{A}_{js} = \hat{A}_{js}\left(\alpha_1(M_1), \alpha_2(M_1), \omega, \varepsilon, \mu, Z, G, \Delta\right)$ определяются формулами (4).

Модель 2. Идеализируя тонкостенную оболочку D, заменим ее на срединную поверхность Γ, тогда для продолженных до поверхности Γ полей получим граничные условия сопряжения

$$\vec{E}_{2\tau}(\xi)\Big|_{\Gamma} = \left(\hat{A}_{11}(\xi)\vec{E}_{1\tau}(\xi) + \hat{A}_{12}(\xi)\vec{H}_{1\tau}(\xi)\right)\Big|_{\Gamma},$$

$$\vec{H}_{2\tau}(\xi)\Big|_{\Gamma} = \left(\hat{A}_{21}(\xi)\vec{E}_{1\tau}(\xi) + \hat{A}_{22}(\xi)\vec{H}_{1\tau}(\xi)\right)\Big|_{\Gamma}.$$

Заметим, что следствия 1–6 могут быть перенесены и на оболочки произвольной формы. Для моделирования же конкретных композитных структур необходимы модели определения параметров композита Z и G [8].

Литература

1. В и н о г р а д о в А. П. Электродинамика композитных материалов. М., 2001.
2. А п о л л о н с к и й С. М., Е р о ф е е н к о В. Т. Эквивалентные граничные условия в электродинамике. СПб., 1998.
3. Т р е т ь я к о в С. А. // Радиотехника и электроника. 1994. Т. 39, № 2. С. 184–192.
4. Н е г а н о в В. А., О с и п о в О. В. // Радиотехника и электроника. 2005. Т. 50, № 3. С. 292–296.
5. В ы т о в т о в К. А. // Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49, № 5. С. 559–566.
6. Х а л и у л л и н Д. Я., Т р е т ь я к о в С. А. // Радиотехника и электроника. 1998. Т. 43, № 1. С. 16–29.
7. Е р о ф е е н к о В. Т., Т а в а к к о л и Д. П. // Вестник БГУ. Сер. 1. 2007. № 2. С. 56–60.
8. Д е м и д ч и к В. И., К о р н е в Р. В. // Вестник БГУ. Сер. 1. 2004. № 1. С. 100–103.

V. T. EROFEENKO, D. P. TAVAKKOLI

MODELS OF THE BOUNDARY CONDITIONS IN ELECTRODYNAMICS ON SCREENS AND SHELLS WITH DISTRIBUTED INHOMOGENEITIES

Summary

Different kinds of the conjugate boundary conditions for electromagnetic fields on thin laminate shells and the impedance boundary conditions on conducting bodies with composite coatings were examined.