УДК.517.958: 537.8

В. Т. ЕРОФЕЕНКО

ИМПЕДАНСНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ НА ПОВЕРХНОСТЯХ МНОГОСЛОЙНЫХ КОМПОЗИТНЫХ СТРУКТУР

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 05.10.2010)

При моделировании взаимодействия электромагнитных полей с телами со сложной материальной структурой широко применяется метод односторонних граничных условий Щукина–Леонтовича [1, 2], которые в общем случае называются импедансными граничными условиями [3]. При таком моделировании граничные условия сопряжения на поверхности тела, связывающие поля внутри и вне тела, заменяются граничными условиями специального вида, содержащими только внешние поля. При этом поля внутри тела исключаются из рассмотрения, а процесс проникновения поля внутрь тела моделируется с помощью импедансных граничных условий на поверхности тела. В зависимости от материальной структуры тела модели граничных условий усложняются. В литературе рассматриваются импедансные граничные условия на изотропных [4], биизотропных [5, 6], сверхпроводящих [7] и других телах. В классическом варианте граничные условия Щукина–Леонтовича вводятся для высокочастотных монохроматических электромагнитных полей, которые для плоских полей на плоских поверхностях являются точными [8]. В случае искривленных граничных поверхностей для тел произвольной формы импедансные граничные условия являются приближенными и требуют исследования границ их применимости [9, 10]. Многие авторы публикаций используют метод импедансных граничных условий для решения краевых задач различных типов [11–14], но, как правило, применительно к полям с гармонической зависимостью от времени. Мало работ посвящено исследованию импедансных граничных условий для полей с произвольной зависимостью от времени. В этом случае граничные условия являются интегральными [15, 16].

В данной работе обобщается метод моделирования импедансных граничных условий на поверхности плоской многослойной структуры из биизотропных композитных материалов, расположенной на подложке из биизотропного материала [6]. Граничные условия могут применяться в локально-плоском приближении при решении краевых задач рассеяния плоских электромагнитных волн на телах произвольной формы с тонкими многослойными покрытиями.

1. Постановка задачи. В пространстве R^3 рассмотрим полупространство $D_2\,(z>\Delta_\Sigma)$ с поверхностью $\Gamma_2\,(z=\Delta_\Sigma)$, заполненное средой с диэлектрической проницаемостью ε, магнитной проницаемостью μ и параметрами киральности *G*, *Z*. На плоскости Γ_2 размещено плоское слоистое покрытие $D(0<z<\Delta_\Sigma)$ толщины Δ_Σ, состоящее из *n* слоев $\Omega_s\,(z_s<z<z_{s+1})$ с толщинами $\Delta_s=z_{s+1}-z_s$, $s=\overline{1,n}$, $z_1=0, z_{n+1}=\Delta_\Sigma$, $\Delta_\Sigma=\sum\limits_{s=1}^{n}\Delta_s$. Полупространство D_2, на котором размещена слоистая структура, называется подложкой. Слои, ограниченные плоскостями $\Gamma^{(s)}(z=z_s)$, $\Gamma^{(1)}=\Gamma_1, \Gamma^{(n+1)}=\Gamma_2$, заполнены биизотропными материалами с электромагнитными параметрами $\varepsilon_s,\mu_s,G_s,Z_s$. Из полупространства $D_1(z<0)$, заполненного средой с параметрами ε_0,μ_0, на покрытие D падает плоская электромагнитная волна E_0, H_0 с временной зависимостью $\exp(-i\omega t)$, с произвольным направлением распространения и с произвольной поляризацией [8]

$$\vec{E}_0 = A\vec{W}_0^{(-1)} + BW_0^{(-2)}, \quad \vec{H}_0 = h_0(A\vec{W}_0^{(-2)} + B\vec{W}_0^{(-1)}), \tag{1}$$

где $W_0^{(\mp1)} = \dfrac{i}{\lambda}(\alpha_2\vec{e}_x - \alpha_1\vec{e}_y)\exp(i\alpha_1 x + i\alpha_2 y \mp v_0 z)$,

$$W_0^{(\mp2)} = \frac{1}{k_0}\left(\mp\frac{iv_0}{\lambda}(\alpha_1\vec{e}_x + \alpha_2\vec{e}_y) + \lambda\vec{e}_z\right)\exp(i\alpha_1 x + i\alpha_2 y \mp v_0 z),$$

$$h_0 = \frac{1}{iZ_0}, \quad \lambda = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, \quad k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}, \quad 0 \le \arg\lambda, \quad k_0 < \pi, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}, \quad v_0 = \sqrt{\lambda^2 - k_0^2},$$

$-\dfrac{\pi}{2} \le \arg v_0 < \dfrac{\pi}{2}$; ω – круговая частота поля; A, B – произвольные комплексные амплитуды поля; α_1, α_2 – произвольные комплексные параметры, определяющие направление распространения поля.

Обозначим: $\vec{E}_2, \vec{H}_2$ – поле в области D_2; $\vec{E}_1', \vec{H}_1'$ – отраженное поле в области D_1; $\vec{E}_1 = \vec{E}_0 + \vec{E}_1'$, $\vec{H}_1 = \vec{H}_0 + \vec{H}_1'$ – суммарное поле в D_1; $\vec{E}^{(s)}, \vec{H}^{(s)}$ – поля в областях Ω_s.

Ставится задача дифракции плоской электромагнитной волны $\vec{E}_0, \vec{H}_0$ на подложке D_2 с многослойным покрытием D из композитных материалов.

Краевая задача 1. Требуется для заданного первичного плоского поля $\vec{E}_0, \vec{H}_0$ (1) определить поля $\vec{E}_1', \vec{H}_1' \in C^1(D_1) \cap C(\bar{D}_1)$; $\vec{E}_2\ \vec{H}_2 \in C^1(D_2) \cap C(\bar{D}_2)$; $\vec{E}^{(s)}\ \vec{H}^{(s)} \in C^1(\Omega_s) \cap C(\bar{\Omega}_s)$, которые удовлетворяют уравнениям

$$\operatorname{rot}\vec{E}_1' = i\omega\mu_0\vec{H}_1', \quad \operatorname{rot}\vec{H}_1' = -i\omega\varepsilon_0 E_1' \text{ в } D_1, \tag{2}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E}^{(s)} = i\omega(\mu_s\vec{H}^{(s)} + Z_s\vec{E}^{(s)}), \ \operatorname{rot}\vec{H}^{(s)} = -i\omega(\varepsilon_s\vec{E}^{(s)} + G_s\vec{H}^{(s)}) \text{ в } \Omega_s, \tag{3}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E}_2 = i\omega(\mu\vec{H}_2 + Z\vec{E}_2), \ \operatorname{rot}\vec{H}_2 = -i\omega(\varepsilon\vec{E}_2 + G\vec{H}_2) \text{ в } D_2, \tag{4}$$

граничным условиям на плоскостях $\Gamma^{(s)}$

$$\begin{gathered}
(E_{1\tau} - E_\tau^{(1)})\Big|_{z=0} = 0, \quad (\vec{H}_{1\tau} - \vec{H}_\tau^{(1)})\Big|_{z=0} = 0, \\
(E_\tau^{(n)} - \vec{E}_{2\tau})\Big|_{z=\Delta\Sigma} = 0, \quad (\vec{H}_\tau^{(n)} - \vec{H}_{2\tau})\Big|_{z=\Delta\Sigma} = 0, \\
(\vec{E}_\tau^{(s-1)} - E_\tau^{(s)})\Big|_{z=z_s} = 0, \quad (\vec{H}_\tau^{(s-1)} - \vec{H}_\tau^{(s)})\Big|_{z=z_s} = 0, \quad s = \overline{2, n}
\end{gathered} \tag{5}$$

и условиям на бесконечности.

При решении краевой задачи (2)–(5) требуется определить большое число полей в плоских областях, удовлетворяющих большому числу граничных условий (5) на граничных плоскостях. В приложениях, как правило, используется отраженное поле $\vec{E}_1', \vec{H}_1'$. Поэтому поставим проблему сформулировать краевую задачу (2)–(5) в виде эквивалентной краевой задачи с импедансным граничным условием, исключая рассмотрение полей в областях Ω_s.

2. Импедансное граничное условие на поверхности композитного полупространства. Представим поле в области D_2 через базисные плоские электромагнитные поля в композитной среде [17], которые удовлетворяют уравнениям Максвелла (4)

$$\vec{E}_2 = x_2\vec{K}^{(-1)}(\vec{r};\alpha_1;\alpha_2;\Xi) + y_2\vec{K}^{(-2)}(\vec{r};\alpha_1;\alpha_2;\Xi), \qquad (6)$$
$$\vec{H}_2 = x_2 p_1\vec{K}^{(-1)}(\vec{r};\alpha_1;\alpha_2;\Xi) + y_2 p_2\vec{K}^{(-2)}(\vec{r};\alpha_1;\alpha_2;\Xi),$$

где $\vec{r} = (x,y,z)$, $\Xi = (\omega,\varepsilon,\mu,G,Z)$; α_1,α_2 – произвольные комплексные постоянные, определяемые первичным полем (1).

$$\vec{K}^{(\mp j)} = \left(ik_x^{(\mp j)}\vec{e}_x + ik_y^{(\mp j)}\vec{e}_y + \frac{\lambda}{k_j}\vec{e}_z\right)\exp(i\alpha_1 x + i\alpha_2 y \mp v_j z), \qquad (7)$$

$$k_x^{(\mp j)} = k_x^{(\mp j)}(\alpha_1,\alpha_2,\Xi) = \frac{1}{\lambda k_j}\left(\mp\alpha_1 v_j - \alpha_2\frac{g}{g_j}\right),$$

$$k_y^{(\mp j)} = k_y^{(\mp j)}(\alpha_1,\alpha_2,\Xi) = \frac{1}{\lambda k_j}\left(\mp\alpha_2 v_j + \alpha_1\frac{g}{g_j}\right),$$

$$k_j = \sqrt{g + \frac{1}{2}a^2 + af_j}, \quad 0 \le \arg k_j < \pi, \quad f_j = (-1)^j f,$$
$$f = \sqrt{\omega^2\varepsilon\mu - b^2}, \quad 0 \le \arg f < \pi, \quad g = \omega^2(\varepsilon\mu - ZG), \qquad (8)$$
$$g_j = f_j - \frac{1}{2}a, \quad a = i\omega(G - Z), \quad b = \frac{\omega}{2}(G + Z),$$
$$\lambda = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, \quad 0 \le \arg\lambda < \pi, \quad v_j = \sqrt{\lambda^2 - k_j^2},$$
$$-\frac{\pi}{2} \le \arg v_j < \frac{\pi}{2}, \quad p_j = \frac{1}{\mu}\left(\frac{ig}{\omega g_j} - Z\right), \quad j = 1, 2.$$

Заметим, что поле (6) удовлетворяет условию излучения на бесконечности в области D_2, т. е. энергия поля распространяется в положительном направлении оси $0z$.

Вычислим тангенциальные составляющие полей (6) на граничной поверхности Γ_2 полупространства D_2, учитывая формулу $\vec{A}_\tau = [\vec{n}[\vec{A},\vec{n}]]$, где $\vec{n} = \vec{e}_z$ – нормаль к плоскости Γ_2. Получим

$$\vec{E}_{2\tau}\Big|_{z=\Delta\Sigma} = i(x_2(k_x^{(-1)}\vec{e}_x + k_y^{(-1)}\vec{e}_y)e^{-v_1\Delta\Sigma} + y_2(k_x^{(-2)}\vec{e}_x + k_y^{(-2)}\vec{e}_y)e^{-v_2\Delta\Sigma})\Phi = \hat{K}\hat{U}\vec{X}_2, \qquad (9)$$

$$\vec{H}_{2\tau}\Big|_{z=\Delta\Sigma} = i(x_2(k_x^{(-1)}\vec{e}_x + k_y^{(-1)}\vec{e}_y)p_1 e^{-v_1\Delta\Sigma} + y_2(k_x^{(-2)}\vec{e}_x + k_y^{(-2)}\vec{e}_y)p_2 e^{-v_2\Delta\Sigma})\Phi = \hat{K}\hat{P}\hat{U}\vec{X}_2, \qquad (10)$$

где

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} k_x^{(-1)}, & k_x^{(-2)} \\ k_y^{(-1)}, & k_y^{(-2)} \end{pmatrix}, \; \hat{U} = \begin{pmatrix} e^{-v_1\Delta\Sigma}, & 0 \\ 0, & e^{-v_2\Delta\Sigma} \end{pmatrix}, \; \hat{P} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix}, \; \vec{X}_2 = i\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\Phi, \quad \Phi = \exp(i\alpha_1 x + i\alpha_2 y).$$

Утверждение 1. Если многослойное покрытие D отсутствует ($\Delta_s = 0,\ s = 1, 2, \dots n$), а на подложку D_2 воздействует плоское первичное поле вида (1), тогда на поверхности Γ_2 подложки D_2 выполнено точное импедансное граничное условие

$$\vec{E}_{1\tau}\Big|_{\Gamma_2} = \hat{Z}_\Pi\,\vec{H}_{1\tau}\Big|_{\Gamma_2}, \qquad (11)$$

где $\hat{Z}_\Pi = \hat{Z}_\Pi(\alpha_1,\alpha_2,\Xi) = \hat{K}\hat{P}^{-1}\hat{K}^{-1} = \begin{pmatrix} Z_{11}^\Pi & Z_{12}^\Pi \\ Z_{21}^\Pi & Z_{22}^\Pi \end{pmatrix}$, $Z_{11}^\Pi = \left(\frac{1}{p_1}k_x^{(-1)}k_y^{(-2)} - \frac{1}{p_2}k_y^{(-1)}k_x^{(-2)}\right)\frac{1}{d_2}$,
$Z_{12}^\Pi = k_x^{(-1)}k_x^{(-2)}\left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1}\right)\frac{1}{d_2}$, $Z_{21}^\Pi = -k_y^{(-1)}k_y^{(-2)}\left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1}\right)\frac{1}{d_2}$, $Z_{22}^\Pi = \left(\frac{1}{p_2}k_x^{(-1)}k_y^{(-2)} - \frac{1}{p_1}k_y^{(-1)}k_x^{(-2)}\right)\frac{1}{d_2}$,
$d_2 = k_x^{(-1)}k_y^{(-2)} - k_y^{(-1)}k_x^{(-2)}$.

В классической записи

$$[\vec{n}, \vec{E}_1]_{\Gamma 2} = \hat{Z}_2[\vec{n}, [\vec{H}_1, \vec{n}]]\Big|_{\Gamma_2}, \tag{12}$$

где $\quad \vec{n} = \vec{e}_z, \quad \hat{Z}_2 = \hat{C}\hat{Z}_\Pi, \quad \hat{C} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя равенство (10), вычислим $\vec{X}_2 = \hat{U}^{-1}\hat{P}^{-1}\hat{K}^{-1}\vec{H}_{2\tau}\Big|_{\Gamma_2}$.

Подставляя в (9), получим формулу

$$\vec{E}_{2\tau}\Big|_{\Gamma_2} = \hat{K}\hat{P}^{-1}\hat{K}^{-1}\vec{H}_{2\tau}\Big|_{\Gamma_2} = \hat{Z}_\Pi \vec{H}_{2\tau}\Big|_{\Gamma_2}. \tag{13}$$

Учитывая непрерывность тангенциальных составляющих поля на плоскости $\vec{E}_{2\tau}\Big|_{\Gamma_2} = \vec{E}_{1\tau}\Big|_{\Gamma_2}$, $\vec{H}_{2\tau}\Big|_{\Gamma_2} = \vec{H}_{1\tau}\Big|_{\Gamma_2}$, получим граничное условие (11). Граничное условие (12) следует из соотношения $[\vec{n}, \vec{E}_1] = \hat{C}\vec{E}_{1\tau}$.

3. Нелокальные граничные условия на слоях. В результате дифракции первичной плоской электромагнитной волны (1) на слоистой структуре D в каждом слое Ω_s образуется электромагнитное поле $\vec{E}^{(s)}$, $\vec{H}^{(s)}$, которое является комбинацией полей (7), характеризуемых параметрами $\alpha_1, \alpha_2, \Xi = \Xi_s = (\omega, \varepsilon_s, \mu_s, G_s, Z_s)$. В связи с этим рассмотрим произвольный слой $\Omega\,(h < z < h + \Delta)$ толщины Δ, ограниченный плоскостями $S_1(z = h)$, $S_2\,(z = h + \Delta)$ и заполненный материалом с параметрами среды ε, μ, G, Z. Электромагнитное поле $\vec{E} = E_x\vec{e}_x + E_y\vec{e}_y + E_z\vec{e}_z$, $\vec{H} = H_x\vec{e}_x + H_y\vec{e}_y + H_z\vec{e}_z$ в слое Ω является комбинацией полей (7). На основании работы [6] сформулируем граничные соотношения на слое Ω.

У т в е р ж д е н и е 2. При воздействии на композитный слой Ω первичного электромагнитного поля вида (1) в слое Ω образуется поле $\vec{E}, \vec{H}$, которое удовлетворяет уравнениям (4) и нелокальным граничным условиям на плоскостях S_1, S_2, связывающим тангенциальные составляющие полей по обе стороны слоя

$$\vec{W}(M_2)\Big|_{M_2 \in S_2} = \hat{B}\vec{W}(M_1)\Big|_{M_1 \in S_1}, \tag{14}$$

где

$M_1 = (x, y, \xi),\ M_2 = (x, y, \xi + \Delta),\ \hat{B} = \hat{B}(\alpha_1, \alpha_2, \Xi, \Delta) = \{B_{ml}\},\ m, l = 1, 2, 3, 4; \vec{W} = (E_x, E_y, H_x, H_y)^T$,

$B_{11} = p[p_2(\Phi_1 S_1 - C_1) - p_1(\Phi_2 S_2 - C_2)], B_{12} = p(p_1\theta_2 S_2 - p_2\theta_1 S_1), B_{13} = p(C_1 - \Phi_1 S_1 + \Phi_2 S_2 - C_2)$,

$B_{14} = p(\theta_1 S_1 - \theta_2 S_2),\ B_{21} = p(p_2\delta_1 S_1 - p_1\delta_2 S_2),\ B_{22} = p(p_1(\Phi_2 S_2 + C_2) - p_2(\Phi_1 S_1 + C_1))$,

$B_{23} = p(\delta_2 S_2 - \delta_1 S_1),\ B_{24} = p(\Phi_1 S_1 + C_1 - \Phi_2 S_2 - C_2),\ B_{31} = -p_1 p_2 B_{13},\ B_{32} = -p_1 p_2 B_{14}$,

$B_{33} = p(p_1(C_1 - \Phi_1 S_1) + p_2(\Phi_2 S_2 - C_2)),\ B_{34} = p(p_1\theta_1 S_1 - p_2\theta_2 S_2),\ B_{41} = -p_1 p_2 B_{23}$,

$B_{42} = -p_1 p_2 B_{24},\ B_{43} = p(p_2\delta_2 S_2 - p_1\delta_1 S_1),\ B_{44} = p(p_1(\Phi_1 S_1 + C_1) - p_2(\Phi_2 S_2 + C_2))$,

$p = \dfrac{1}{p_1 - p_2},\ S_j = \mathrm{sh}\,(\Delta\, v_j),\ C_j = ch\,(\Delta\, v_j),\ \Phi_j = \dfrac{\alpha_1\alpha_2\, g_j}{g v_j},\ \theta_j = \dfrac{g_j\,(\alpha_1^2 - k_j^2)}{g v_j},\ \delta_j = \dfrac{g_j(\alpha_2^2 - k_j^2)}{g v_j}.$

В указанных формулах используются величины (8).

4. Импедансное граничное условие на слоистой композитной структуре. Рассмотрим многослойную структуру D толщины Δ_Σ, состоящую из n плоских композитных слоев Ω_s. Выведем нелокальное граничное условие, связывающее поля на лицевых плоскостях $\Gamma_1(z = 0)$ и $\Gamma_2(z = \Delta_\Sigma)$, ограничивающих структуру.

Утверждение 3. При воздействии на структуру D первичного электромагнитного поля вида (1) на плоскостях Γ_1 и Γ_2 в результате проникновения поля через слои Ω_s образуются предельные поля, которые связаны нелокальным граничным условием

$$\vec{W}_2(M_2)\Big|_{M_2\in\Gamma_2} = \hat{B}^c \vec{W}_1(M_1)\Big|_{M_1\in\Gamma_1}, \tag{15}$$

где $\hat{B}^c = \hat{B}^{(n)}\hat{B}^{(n-1)}\cdots\hat{B}^{(2)}\hat{B}^{(1)} = \{b_{ml}^c\}$, $\hat{B}^{(s)} = \hat{B}(\alpha_1,\alpha_2,\Xi_s,\Delta_s)$, $\vec{W}_j = (E_{jx}, E_{jy}, H_{jx}, H_{jy})$. (16)

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим соотношение (14) для каждого слоя Ω_s

$$\vec{W}^{(s)}(M_2)\Big|_{M_2\in\Gamma^{(s+1)}} = \hat{B}^{(s)}\vec{W}^{(s)}(M_1)\Big|_{M_1\in\Gamma^{(s)}}, \tag{17}$$

где $\hat{B}^{(s)} = \hat{B}(\alpha_1,\alpha_2,\Xi_s,\Delta_s) = \{b_{ml}^{(s)}\}$, $\vec{W}^{(s)} = (E_x^{(s)}, E_y^{(s)}, H_x^{(s)}, H_y^{(s)})$.

Для слоя Ω_1

$$\vec{W}^{(1)}\Big|_{\Gamma^{(2)}} = \hat{B}^{(1)}\vec{W}^{(1)}\Big|_{\Gamma^{(1)}}.$$

Учитывая непрерывность тангенциальных составляющих полей (5) на плоскостях $\Gamma^{(s)}$, имеем соотношения

$$\vec{W}^{(1)}\Big|_{\Gamma^{(2)}} = \vec{W}^{(2)}\Big|_{\Gamma^{(2)}}, \quad \vec{W}^{(1)}\Big|_{\Gamma^{(1)}} = \vec{W}_1\Big|_{\Gamma_1}.$$

В результате

$$\vec{W}^{(2)}\Big|_{\Gamma^{(2)}} = \hat{B}^{(1)}\vec{W}_1\Big|_{\Gamma_1}. \tag{18}$$

Умножим (18) на матрицу $\hat{B}^{(2)}$. Учитывая (17) при $s = 2$, получим

$$\vec{W}^{(3)}\Big|_{\Gamma^{(3)}} = \hat{B}^{(2)}\hat{B}^{(1)}\vec{W}_1\Big|_{\Gamma_1}.$$

Далее, умножая последовательно на матрицы $\hat{B}^{(3)}, \hat{B}^{(4)}, \ldots \hat{B}^{(n)}$, получим требуемую формулу (15).

У т в е р ж д е н и е 4. При воздействии первичного плоского электромагнитного поля вида (1) на многослойную композитную структуру D, расположенную на подложке D_2, на поверхности Γ_1 слоистой структуры выполнено импедансное граничное условие

$$\vec{E}_{1\tau}(M_2)\Big|_{M_2\in\Gamma_1} = \hat{Z}^c \vec{H}_{1\tau}(M_1)\Big|_{M_1\in\Gamma_1}, \tag{19}$$

где

$$\hat{Z}^c = (\hat{Z}_\Pi\hat{N} - \hat{L})^{-1}(\hat{M} - \hat{Z}_\Pi\hat{Q}), \tag{20}$$

элементы матриц

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix}, \quad \hat{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}, \quad \hat{N} = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix}, \quad \hat{Q} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$$

выражаются через элементы матрицы $\hat{B}^{(c)}$ (16):

$$l_{11} = b_{11}^c, \quad l_{12} = b_{12}^c, \quad m_{11} = b_{13}^c, \quad m_{12} = b_{14}^c,$$

$$l_{21} = b_{21}^c, \quad l_{22} = b_{22}^c, \quad m_{21} = b_{23}^c, \quad m_{22} = b_{24}^c,$$

$$n_{11} = b_{31}^c, \quad n_{12} = b_{32}^c, \quad q_{11} = b_{33}^c, \quad q_{12} = b_{34}^c,$$

$$n_{21} = b_{41}^c, \quad n_{22} = b_{42}^c, \quad q_{21} = b_{43}^c, \quad q_{22} = b_{44}^c.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем векторное граничное условие (15) в виде двух векторных соотношений меньшей размерности

$$\vec{E}_{2\tau}\Big|_{\Gamma_2} = (\hat{L}\vec{E}_{1\tau} + \hat{M}\vec{H}_{1\tau})\Big|_{\Gamma_1}, \tag{21}$$

$$\vec{H}_{2\tau}\Big|_{\Gamma_2} = (\hat{N}\vec{E}_{1\tau} + \hat{Q}\vec{H}_{1\tau})\Big|_{\Gamma_1}. \tag{22}$$

Умножим (22) на матрицу $\hat{Z}_\Pi$, тогда, учитывая (13), (21), получим

$$\vec{E}_{2\tau}\Big|_{\Gamma_2} = (\hat{Z}_\Pi\hat{N}\vec{E}_{1\tau} + \hat{Z}_\Pi\hat{Q}\vec{H}_{1\tau})\Big|_{\Gamma_1} = (\hat{L}\vec{E}_{1\tau} + \hat{M}\vec{H}_{1\tau})\Big|_{\Gamma_1}.$$

Откуда следует формула (19)

$$\vec{E}_{1\tau}\Big|_{\Gamma_2} = (\hat{Z}_\Pi\hat{N} - \hat{L})^{-1}(\hat{M} - \hat{Z}_\Pi\hat{Q})\vec{H}_{1\tau}\Big|_{\Gamma_1}.$$

С л е д с т в и е 1. *Для идеально проводящей подложки D_2 в граничном условии* (19) $\hat{Z}^c = -\hat{L}^{-1}\hat{M}$ [6].

С л е д с т в и е 2. *Для подложки D_2 из обычного материала, характеризуемого параметрами* $\varepsilon, \mu, Z = 0, G = 0$*, матрица* $\hat{Z}_\Pi$ *в* (20) *имеет вид* [8]

$$\hat{Z}_\Pi = \frac{\omega\mu}{ik^2 v}\begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2, & k^2 - \alpha_1^2 \\ \alpha_2^2 - k^2, & -\alpha_1\alpha_2 \end{pmatrix},$$

$$k^2 = \omega^2\varepsilon\mu, \quad v = \sqrt{\lambda^2 - k^2}, \quad -\frac{\pi}{2} \le \arg v < \frac{\pi}{2}.$$

5. Решение задачи рассеяния волн на слоистой структуре. Для определения отраженного поля $\vec{E}_1', \vec{H}_1'$, которое образуется при рассеянии плоского поля $\vec{E}_0, \vec{H}_0$ на *n*-слойной структуре *D,* необходимо решить краевую задачу (2)–(5). Для упрощения алгоритма определения поля $\vec{E}_1', \vec{H}_1'$ сформулируем краевую задачу, которая эквивалентна задаче (2)–(5), с использованием импедансного граничного условия (19).

<u>Краевая задача 2.</u> При заданном первичном поле $\vec{E}_0, \vec{H}_0$ (1) требуется определить плоское электромагнитное поле $\vec{E}_1', \vec{H}_1' \in C^1(D_1) \cap C(\bar{D}_1)$, которое удовлетворяет уравнениям

$$\operatorname{rot}\vec{E}_1' = i\omega\mu_0\vec{H}_1', \quad \operatorname{rot}\vec{H}_1' = -i\omega\varepsilon_0\vec{E}_1', \quad z < 0, \tag{23}$$

граничному условию на плоскости $\Gamma_1 (z = 0)$

$$\vec{E}_{1\tau}\Big|_{z=0} = \hat{Z}^c\vec{H}_{1\tau}\Big|_{z=0} \tag{24}$$

и условиям на бесконечности в области D_1.

Решение уравнения (23) представим в виде комбинации плоских полей

$$\vec{E}_1' = x_1\vec{W}_0^{(+1)} + y_1\vec{W}_0^{(+2)}, \quad \vec{H}_1' = h_0(x_1\vec{W}_0^{(+2)} + y_1\vec{W}_0^{(+1)}), \tag{25}$$

где x_1, y_1 – амплитуды, подлежащие определению.

Вычислим тангенциальные составляющие полей (1), (25):

$$\vec{E}_{1\tau}'\Big|_{z=0} = \frac{i}{\lambda}\left\{\left(\alpha_2 x_1 + \frac{\alpha_1 v_0}{k_0}y_1\right)\vec{e}_x + \left(-\alpha_1 x_1 + \frac{\alpha_2 v_0}{k_0}y_1\right)\vec{e}_y\right\}\Phi_0 = \frac{iv_0}{\lambda}\hat{C}^{(+)}\vec{X}_1\Phi_0,$$

$$\vec{H}_{1\tau}'\Big|_{z=0} = h_0\frac{iv_0}{\lambda}\hat{D}^{(+)}\vec{X}_1\Phi_0, \quad \vec{E}_{0\tau}\Big|_{z=0} = \frac{iv_0}{\lambda}\hat{C}^{(-)}\vec{X}_0\Phi_0, \qquad \vec{H}_{0\tau}\Big|_{z=0} = h_0\frac{iv_0}{\lambda}\hat{D}^{(-)}\vec{X}_0\Phi_0,$$

$$\Phi_0 = \exp(i\alpha_1 x + i\alpha_2 y), \quad \vec{\mathrm{X}}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathrm{X}}_0 = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix},$$

$$\hat{C}^{(\pm)} = \{c_{jr}^{(\pm)}\}, \quad \hat{D}^{(\pm)} = \{d_{jr}^{(\pm)}\}, \quad c_{11}^{(\pm)} = \frac{\alpha_2}{v_0}, \quad c_{12}^{(\pm)} = \pm\frac{\alpha_1}{k_0}, \quad c_{21}^{(\pm)} = -\frac{\alpha_1}{v_0}, c_{22}^{(\pm)} = \pm\frac{\alpha_2}{k_0},$$

$$d_{11}^{(\pm)} = \pm\frac{\alpha_1}{k_0}, \quad d_{12}^{(\pm)} = \frac{\alpha_2}{v_0}, \quad d_{21}^{(\pm)} = \pm\frac{\alpha_2}{k_0}, \quad d_{22}^{(\pm)} = -\frac{\alpha_1}{v_0}.$$

В результате

$$\vec{E}_{1\tau}\Big|_{z=0} = \frac{iv_0}{\lambda}(\hat{C}^{(+)}\vec{\mathrm{X}}_1 + \hat{C}^{(-)}\vec{\mathrm{X}}_0)\,\Phi_0,$$

$$\vec{H}_{1\tau}\Big|_{z=0} = h_0\frac{iv_0}{\lambda}(\hat{D}^{(+)}\vec{\mathrm{X}}_1 + \hat{D}^{(-)}\vec{\mathrm{X}}_0)\,\Phi_0.$$

Подставим в граничное условие (19), тогда

$$\hat{C}^{(+)}\vec{\mathrm{X}}_1 + \hat{C}^{(-)}\vec{\mathrm{X}}_0 = h_0\hat{Z}^c(\hat{D}^{(+)}\vec{\mathrm{X}}_1 + \hat{D}^{(-)}\vec{\mathrm{X}}_0).$$

Откуда следует

$$\vec{\mathrm{X}}_1 = -(\hat{C}^{(+)} - h_0\hat{Z}^c\hat{D}^{(+)})^{-1}(\hat{C}^{(-)} - h_0\hat{Z}^c\hat{D}^{(-)})\vec{\mathrm{X}}_0.$$

Таким образом, найден вектор $\vec{\mathrm{X}}_1$, компоненты x_1, y_1 которого являются амплитудами искомого поля (25).

Литература

1. Л е о н т о в и ч М. А. О приближенных граничных условиях для электромагнитного поля на поверхности хорошо проводящих тел: Исследования по распространению радиоволн: в 2 ч. М., Л., 1948. Ч. 2. С. 5–12.
2. P e l o s i G., U f i m t s e v P. Ya. // IEEE Antennas and Propagation Magazine. 1996. Vol. 38, N 1. P. 31–35.
3. А п о л л о н с к и й С. М., Е р о ф е е н к о В. Т. Эквивалентные граничные условия в электродинамике. СПб., 1999.
4. А п о л л о н с к и й С. М., Е р о ф е е н к о В. Т. // Электричество. 1995. № 4. С. 68–72.
5. Х а л л и у л и н Д. Я., Т р е т ь я к о в С. А. // Радиотехника и электроника. 1998. Т. 43, № 1. С. 16–29.
6. Е р о ф е е н к о В. Т., Т а в а к к о л и Д. П. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2008. № 1. С. 49–55.
7. К р а в ч е н к о В. Ф. Электродинамика сверхпроводящих структур. М., 2006.
8. Е р о ф е е н к о В. Т., К о з л о в с к а я И. С. Аналитическое моделирование в электродинамике. Минск, 2010.
9. М а р т ы н о в Н. А., М и р о н е н к о Г. Н., К и р ь я н о в О. Е. // Радиотехника. 2000. № 6. С. 74–78.
10. К р а в ч е н к о В. Ф., Е р о ф е е н к о В. Т. // Радиотехника и электроника. 2000. Т. 45, № 11. С. 1300–1306.
11. И л ь и н с к и й А. С., С л е п я н Г. Я. // Радиотехника и электроника. 1990. Т. 35, вып. 6. С. 1121–1139.
12. З в е з д и н а М. Ю. // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2003. Т. 6, № 4. С. 38–41.
13. П р е о б р а ж е н с к и й А. П. // Электромагнитные волны и электронные системы. 2006. Т. 11, № 2. С. 61–63.
14. Б а б и ч В. М. // Радиотехника и электроника. 2005. Т. 50, № 3. С. 297–301.
15. А п о л л о н с к и й С. М., Е р о ф е е н к о В. Т. // Электричество. 1993. № 12. С. 64–67.
16. У р е в М. В. // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 1997. Т. 37, № 12. С. 1489–1497.
17. Е р о ф е е н к о В. Т., Т а в а к к о л и Д. П. // Вестник БГУ. Сер. 1. Физ. Мат. Информ. 2007. № 2. С. 56–60.

V. T. EROFEENKO

IMPEDANCE BOUNDARY CONDITIONS FOR BOUNDARY-VALUE PROBLEMS OF DIFFRACTION ON THE SURFACES OF MULTILAYER COMPOSITE STRUCTURES

Summary

Modeling methods of impedance boundary conditions for monochromatic electromagnetic fields on the surface of plane multilayer structure made from biisotropic composite materials on the biisotropic substructure are generalized. Exact one-sided boundary conditions for plane fields with arbitrary polarization and arbitrary direction of field propagation are presented.